ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1984

***

MATHÉMATIQUES
2ème ÉPREUVE

OPTION P'
(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHS II -- P'

Notations

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.
$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.

$E(x)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal au réel x : $n \leq x < n + 1$.

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n ($\in \mathbb{N}$) de f ; $f^{(0)} = f$.

Le problème comporte trois parties indépendantes ; seules les premières questions des deuxième et troisième partie utilisent un résultat de la première partie qui pourra être admis.

1ère PARTIE

Soit f la fonction définie, dans l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par la relation :

$$f(x) = \text{tg}x .$$

1°) Préciser, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs des dérivées $f^{(2k)}(0)$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes P_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, construits sur le corps des réels tels que :

a) le degré de P_n est $n + 1$; le polynôme P_n est une fonction paire, lorsque n est impair, impaire lorsque n est pair.

b) $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = P_n(\text{tg}x)$.

c) $$P_n(X) = \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_{n,q} X^{n+1-2q} ;$$

relation où les coefficients $a_{n,q}$ sont des entiers strictement positifs.

Calculer la valeur des coefficients $a_{n,0}$ en fonction de n.

.../...

2°) Montrer la relation : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}(0) = a_{2k+1,\, k+1}$.

Dans toute la suite, il sera posé :

$$t_k = a_{2k+1,\, k+1}.$$

Calculer les coefficients t_0 et t_1. Soit $v_k(x)$ le terme général, d'une série entière, défini par :

$$v_k(x) = \frac{t_k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Soit S_p la somme partielle : $\quad S_p(x) = \sum_{q=0}^{p-1} v_q(x).$

Montrer : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $S_p(x) \leqslant \operatorname{tg} x$; en déduire une inégalité vérifiée par le rayon de convergence R de cette série.

3°) Soit S la fonction définie par la somme de cette série :

$$\forall x \in]-R, R[\quad , \quad S(x) = \sum_{q=0}^{\infty} v_q(x).$$

Soit g la fonction définie dans l'intervalle]-R, R[par la relation :

$$g(x) = S(x) \cos x.$$

Montrer que cette fonction g et la fonction $x \longmapsto f(x) \cos x$ ont des dérivées qui prennent mêmes valeurs en 0.

<u>Indication</u> : utiliser la propriété : $\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

En admettant que la fonction g est développable en série entière dans l'intervalle]-R, R[, en déduire l'égalité :

$$\forall x \in]-R, R[\quad , \quad S(x) = \operatorname{tg} x.$$

Préciser la valeur de R.

4°) En admettant la propriété :

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| < R \quad , \quad S(z) = \operatorname{tg} z,$$

déterminer le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \operatorname{th} x$ dans l'intervalle]-R, R[.

5°) Déduire des résultats précédents les développements en série entière, dans l'intervalle I, des fonctions h et k définies par les relations :

$$h(x) = \ln(\cos x) \quad , \quad k(x) = \ln(\operatorname{ch} x).$$

.../...

2ème PARTIE

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(\mathrm{ch}x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°) Montrer que cette fonction Φ est continue et impaire. En utilisant les résultats de la première partie, montrer que cette fonction est indéfiniment dérivable. Calculer $\Phi'(0)$, $\Phi''(0)$ et $\Phi'''(0)$.

2°) Etudier les variations de cette fonction Φ sur $\mathbb{R}$.

Considérer la fonction ψ : $\psi(x) = x^2 \Phi'(x)$.

3°) Déterminer le signe de la fonction Φ'' suivant les valeurs de x ; considérer la fonction θ : $\theta(x) = x^3 \Phi''(x)$.

4°) Construire le graphe de la fonction Φ.

5°) Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{\infty} [1 - \Phi(x)]\, dx$?

3ème PARTIE

Soit D la réunion des intervalles $I_k =]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$. Soit Φ_1 la fonction définie sur D par la relation :

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(|\cos x|) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \in D, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1°) Vérifier que cette fonction Φ_1 est continue et impaire sur D. Montrer, à l'aide des résultats de la première partie, que cette fonction est indéfiniment dérivable. Calculer $\Phi_1'(0)$, $\Phi_1''(0)$ et $\Phi_1'''(0)$.

2°) Etudier les variations de cette fonction Φ_1 sur les intervalles I_k, k = 0, 1, 2, ... Considérer la fonction ψ_1 définie par : $\psi_1(x) = x^2 \Phi_1'(x)$.

3°) Déterminer le signe de la fonction Φ_1'' suivant les valeurs de x ; considérer la fonction θ_1 : $\theta_1(x) = x^3 \Phi_1''(x)$.

4°) Construire le graphe de la fonction Φ_1.